Μάθημα 17º

08/05/18

Άσκηση 1 Φ3

1ος τρόπος

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο F και $x\in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο X $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$

g — " — στο X $g(x_n) \xrightarrow{d} g(x)$

Εφόσον $x_n\in F$ έχουμε ότι $f(x_n) = g(x_n)$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Τότε, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ και από τη μοναδικότητα

$f(x_n) \longrightarrow g(x)$ του ορίου ακολουθίας

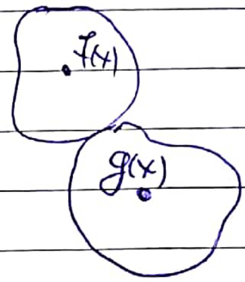
προκύπτει ότι $f(x)=g(x)$ δηλ. $x\in X$.

Επομένως το F είναι κλειστό.

2η απόδειξη Θδο το $X \setminus F$ είναι ανοικτό

Έστω $x \in X \setminus F$ τότε $f(x) \neq g(x)$
Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2} d(f(x), g(x))$ και έχουμε:

$B_d(f(x), \varepsilon) \cap B_d(g(x), \varepsilon) = \emptyset$



• Εφόσον η f είναι συνεχής (στο x) $\exists\ \delta_1 > 0$ ώστε $\forall\ y \in X$ αν

$\rho(y,x) < \delta_1$ τότε $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

• Εφόσον η g είναι συνεχής (στο x) $\exists\ \delta_2 > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$ αν $\rho(y,x) < \delta_2$ τότε $d(g(y), g(x)) < \varepsilon$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Αν $y \in B_\rho(x, \delta)$ δηλ: αν $\rho(y,x) < \delta$ τότε $\rho(y,x) < \delta_1$

άρα $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

και $\rho(y,x) < \delta_2$ άρα $d(g(y), g(x)) < \varepsilon$

Εφόσον $B_d(f(x), \varepsilon) \cap B_d(g(x), \varepsilon) = \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι $f(y) \neq g(y)$
δηλαδή $y \in X \setminus F$

Αποδεικνύουμε ότι $B_\rho(x, \delta) \subseteq X \setminus F$

Επομένως το $X \setminus F$ είναι ανοικτό

β) Αν D πυκνό και $f(x)=g(x)$ $\forall x \in D$
έχουμε $D \subseteq F$

$\Rightarrow \overline{D} \subseteq \overline{F} \xrightarrow[F \text{ κλειστό}]{D \text{ πυκνό}} X \subseteq F \Rightarrow F = X \Rightarrow f = g$

Άσκηση 2 Φ3

Εφόσον ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης αρκεί νδο η $(\rho(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον η x_n είναι βασική $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_1$ $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$

Εφόσον η y_n είναι βασική $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall$ $n, m \geq n_2$ $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon/2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$
Για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα, η ακολουθία $(\rho(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική άρα (εφόσον ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης)

είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 3 φ3

Εφόσον το σύνολο $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό $\exists\, x\in\bar{A}$ με $x\notin A$.

Δηλαδή $x\in\overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$ και $x\neq x_n \ \forall\, n\in\mathbb{N}$

Θα βρούμε επαγωγικά $k_1<k_2<\ldots<k_n<k_{n+1}<\ldots$ ώστε $\rho(x_{k_n},x)<\frac{1}{n} \ \forall\, n\in\mathbb{N}$

1ο Επαγωγικό βήμα

$B_\rho(x,1)\cap A\neq\emptyset$, δηλαδή $\exists\, k_1\in\mathbb{N} : \rho(x_{k_1},x)<1$

Γενικό Επαγωγικό βήμα

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί $k_1<k_2<\ldots<k_n$ ώστε $\rho(x_{k_i},x)<\frac{1}{i}$ για $i=1,\ldots,n$

Θέτουμε: $\delta=\min\left\{\frac{1}{n+1}, \rho(x_1,x), \rho(x_2,x),\ldots,\rho(x_{k_n},x)\right\}$

Τότε $\delta>0$.

Εφόσον $x\in\bar{A} \Rightarrow B_\rho(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$

Συ. $x_i\notin B_\rho(x,\delta)$ για $i=1,\ldots,k_n$

υπάρχει $k_{n+1}>k_n$ ώστε $\rho(x_{k_{n+1}},x)<\delta\leq\frac{1}{n+1}$

Η επαγωγική κατασκευή είναι πλήρης.

Εφόσον $\rho(x_{k_n},x)<\frac{1}{n} \ \forall\, n$ έχουμε $x_{k_n}\xrightarrow{\rho} x$

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο X συμπεραίνουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Άσκηση 4 φ3

$F_n = [n, +\infty)$

Άσκηση 5 φ3

Η άσκηση αυτή δείχνει ότι το θεώρημα του Cantor ΔΕΝ ισχύει σε χώρους που δεν είναι πλήρεις.

Γνωρίζουμε, ότι αν το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ τότε το $F\cap\mathbb{Q}$ θα είναι κλειστό στο $\mathbb{Q}$

Θέτουμε $F_n = [\sqrt{2}, \sqrt{2}+\frac{1}{n}]\cap\mathbb{Q}$

Έχουμε τότε: F_n κλειστό, $F_n \neq \emptyset$,

$\mathrm{diam}(F_n) \leq \frac{1}{n} \to 0$ και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left([\sqrt{2}, \sqrt{2}+1/n]\cap\mathbb{Q}\right) = \{\sqrt{2}\}\cap\mathbb{Q} = \emptyset$$

Άσκηση 6 Φ3

$2 \Rightarrow (1)$

Το G είναι ανοιχτό ως αντίστροφη εικόνα ανεχούς συνάρτησης (από θεωρία)

$(1) \Rightarrow (2)$

Έστω G ανοιχτό. Τότε το $F = X \setminus G$ είναι κλειστό. Ορίζουμε $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, F)$

Η f είναι συνεχής (από θεωρία)

$x \in G \Leftrightarrow x \in X \setminus F$ άρα $x \notin F \Leftrightarrow x \notin \bar{F} \Leftrightarrow \rho(x, F) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow$

F κλειστό

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}((0, +\infty))$. Άρα για $V = (0, +\infty)$ και την f που ορίσαμε παραπάνω έχουμε f συνεχής

V ανοιχτό

$G = f^{-1}(V)$

Scanned by CamScanner

Άσκηση 7 φ. 3

α) Από το θεώρημα σταθερού σημείου Banach υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $x = f(x)$

Έχουμε:

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) \underset{f\circ g = g \circ f}{=} (g \circ f)(x) = g(f(x)) \underset{f(x)=x}{=} g(x)$$

Άρα το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f και εφόσον το x είναι μοναδικό σταθερό σημείο της f προκύπτει ότι $g(x) = x$.

β) Εφόσον η f^k είναι συστολή στον πλήρη μ.χ. (X, ρ) υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε

$$f^k(x) = x$$

Εφαρμόζοντας το A για την f^k και την f εφόσον $f^k \circ f = f \circ f^k$

υπάρχει μοναδικό $x \in X$: $f^k(x) = x = f(x)$.

Αν υπήρχε $y \in X$: $f(y) = y$ τότε $f^k(y) = y$

Άρα $y = x$